

GRADUATE SCHOOL OF BUSINESS ADMINISTRATION

KOBE UNIVERSITY

ROKKO KOBE JAPAN

Discussion Paper Series

資本所得税による課税均衡の パレート改善可能性について*

神戸大学大学院経営学研究科学術研究員
清水 一

2002年6月27日

1 はじめに

不完備市場モデルの競争均衡がパレート非効率であることはよく知られている。本稿はこの点に着目し、標準的な不完備市場モデルに税制、特に資本所得税の導入によってえられる均衡もパレート非効率であることを証明した。特に比較的少ない政策変数によって、均衡をパレート改善できることを証明している。さらに、本稿で導入した税制によっては、均衡はパレート最適を達成できないことも証明している。

本稿の想定する経済は以下のようなものである。2期間のモデルを考え、不確実性を2期目に起こる自然の状態によって表す。つまり、アロー・デブルー流の状態選好アプローチを採用する¹。この経済では、1期目に証券を取引できるが、2期目には証券から得られる所得に課税（資本所得税）がされる。証券配当に対する税率は、2期目に実現する状態によって変えることができるものとする。これは、好況・不況によって減税があったり増税があったりすることに対応していると解釈できる。政府は税収をある配当率で各個人に一括移転する。この証券は、状態に依存して購買力が引き渡されるような証券で、ある個人が発行したものを、他の個人が購入するようになっているので、純供給量はゼロである。また、2期目には財市場が開かれる。個人は、2期目の状態に依存した初期賦存と、課税後の証券配当、および、政府からの移転を元手に財市場で取引を行う。

均衡の性質を議論する際に必要なことは、均衡が存在することの確認である。もし、均衡が存在しなければ、均衡の性質を詳細に調べてもほとんど意味がない。本稿のモデルに均衡が存在することは、清水(2002)によって肯定的に解決されている。この結果を定理1、および系1として再掲している。

次に、本稿と関連する既存研究について述べる。不完備市場理論に関する一般的な議論は、Magill and Quinzii (1996), Magill and Shafer (1991)に詳しい。不完備市場に資本所得税を導入した研究は、筆者の知る限り、Tirelli(2000)のみである。Tirelliでは、資本所得税を、生産のある不完備市場に導入して、税制の存在しない状態から、税を導入したときに、パレート改善できるような資本所得税率が存在することを証明している。但し、不完備市場に資本所得税を導入し、課税均衡の定式化等のモデル化することは、本稿のもとになった清水(2000)によってTirelli(2000)と独立に考察された。

*榊原茂樹教授(神戸大学) 入谷純教授(神戸大学) より有益なコメントを頂いた。記して感謝します。

¹Arrow(1964), Debreu(1959)

税制の扱い以外での本稿と Tirelli(2000) との違いは、本稿が空売り制約を置かず分析しているのに対し、Tirelliは空売り制約を置いている事があげられる。不完備市場理論において空売り制約を置かず分析を行うことが主流であるので、これも本稿の本質的な利点であると考えられる。

2 モデル

Geanakoplos and Polemarchakis(1986) (以下 GP と略す) のモデルに、資本所得税制を付加したモデルを考察する。

期首と期末のみの1期間モデルを考える²。経済には不確実性が存在し、それは期末に実現する S 個の自然の状態 (state of nature) $s \in S := \{1, \dots, S\}$ ³ によって表されるものとする。物理的な属性の異なる財は L 種類存在し、 $l \in L := \{1, \dots, L\}$ で表す。物理的な属性が同一の財であっても、異なる状態で利用可能ならば異なる財と考えることにする。ある状態 s における財 l を $l(s)$ で表す。財は期末に開かれる財市場で取り引きされる。各状態ごとに異なる市場が開かれる。財価格を、 $p := (p_1, \dots, p_S) \in \mathbb{R}_+^{SL}$, $p_s := (p_{s1}, \dots, p_{sL}) \in \mathbb{R}_+^L$ で表す。また、経済には証券が A 種類存在し、第 a 証券の量を $y_a \in \mathbb{R}$, $a \in A := \{1, \dots, A\}$ で表す ($y_a \geq 0$ ならば買い持ち (long position) を、 $y_a \leq 0$ ならば売り持ち (short position) を表わす。)。以下では断らない限り $A < S$ と仮定する。各証券は期末に実現する状態に依存して、その保有者に r_{sa} 単位の $1(s)$ 財 (状態 s における基準財) を引き渡すことを約束する。存在する証券のペイオフをまとめたペイオフ行列 R を、 $S \times A$ 行列

$$R := \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1A} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{S1} & \dots & r_{SA} \end{bmatrix}$$

で表す。 r_s で第 s 行を表す。証券は期首に不確実性が解消する前に証券市場で取り引きされ、証券価格を $q \in \mathbb{R}^A$ で表す。 $\text{rank} R = S$ の時に市場は完備であるといい、 $\text{rank} R < S$ の時に不完備であるという。 $A < S$ のとき市場はもちろん不完備である。証券の純供給量はゼロであるとする。

経済には政府が存在しており、証券からのペイオフに定率税をかけて、その税収を一括で各個人に $\alpha := (\alpha_s^h)_{h,s}$, $0 < \alpha_s^h < 1$, $\sum_h \alpha_s^h = 1$, $\forall s \in S$ の割合で移転として割り当てる。状態 s における移転の総額を T_s で表す。個人 h の移転を $T^h := (T_1^h, \dots, T_S^h)$, $T_s^h := \alpha_s^h T_s$ で表わし、移転の組を $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_S)$ で表わす。

消費者は H 人存在し、 $h \in H := \{1, \dots, H\}$ で表す。各消費者は消費集合 \mathbb{R}_+^{SL} 上の効用関数 $U^h : \mathbb{R}_+^S \rightarrow \mathbb{R}$ と財の賦存 $e^h \in \mathbb{R}_+^{SL}$ で特徴づけられる。消費計画を $x^h := (x_1^h, \dots, x_S^h) \in \mathbb{R}_+^{SL}$ で表す。ポートフォリオを $y^h := (y_1^h, \dots, y_A^h) \in \mathbb{R}^A$ で表す。また、 $\mathbf{e} := (e^1, \dots, e^H)$, $\mathbf{x} := (x^1, \dots, x^H)$, $\mathbf{y} := (y^1, \dots, y^H)$, $\mathbf{U} := (U^1, \dots, U^H)$, とする。

情報の非対称性と取引コストがなく、財と証券の完全分割可能性を仮定する。各資産にかけられる定率税 $t := (t_1, \dots, t_S)$, $0 < t_s < 1$ は所与としておく。また、課税後のペイオフ行列を、

$$\bar{R} := \begin{bmatrix} 1 - t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 - t_S \end{bmatrix} R$$

² 2 期間モデルの1期目・2期目を、1 期間モデルの期首・期末と同一視している。

³ 記号の節約のために、集合の最大元とその集合を同じ記号で表わす。

で定義する。 \bar{r}_s で第 s 行を表す。また、

$$\begin{aligned} y_{+a}^h &:= \max(y_a^h, 0) & y_{-a}^h &:= \min(y_a^h, 0) \\ y_+^h &:= (y_{+1}^h, \dots, y_{+A}^h) & y_-^h &:= (y_{-1}^h, \dots, y_{-A}^h) \end{aligned}$$

と定義すると、 $y^h = y_+^h + y_-^h$ である。 $y_+^h \geq 0$ ⁴は買い持ち (long position) を、 $y_-^h \leq 0$ は売り持ち (short position) を表わしている。ここで、効用関数、賦存、ペイオフ行列に関して次を仮定する。

(A1) 全ての $h \in H$ について、 U^h は連続かつ準凹である。

(A2) $e^h \in \mathbb{R}_{++}^{SL}$, $\forall h \in H$

(A3) U^h は定義域の内点において狭義単調増加関数である。つまり、 $x > \tilde{x} \gg 0$ ならば $U^h(x) > U^h(\tilde{x})$ である。

(A4) $\{x' \in \mathbb{R}_+^{SL} | U^h(x') \geq U^h(x)\} \subset \mathbb{R}_{++}^{SL}$, $\forall x \in \mathbb{R}_{++}^{SL}$

(A5) $r_s \geq 0$, $\forall s \in S$

(A6) $\text{rank}R = A < S$

個人の予算制約は

$$p_s \cdot (x_s^h - e_s^h) \leq p_{s1} \{(1 - t_s)r_s \cdot y_+^h + r_s \cdot y_-^h + T_s^h\}, \forall s \in S \quad (1)$$

$$q \cdot y^h = 0 \quad (2)$$

である。また、予算集合を

$$B(e^h, p, q, T^h) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{S(L-1)} \times \mathbb{R}^A | (x, y) \text{ は (1)(2) をみたす}\}$$

であらわす。各個人は、予算制約の下で効用最大化を行う。政府の予算制約は

$$t_s \sum_{h \in H} r_s \cdot y_+^h = \sum_{h \in H} T_s^h, \forall s \in S$$

である。次に均衡を定義しよう。

定義 経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t, \alpha)$ の課税均衡とは、価格と配分と移転の組 $(p, q, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{T})$ で、次の条件をみたすものとする。

(i) 全ての消費者 $h \in H$ に対して、 (p, q, \mathbf{T}) を所与として (x^h, y^h) が予算制約の下で U^h の最大元になる。

(ii) 財市場と証券市場において需給が一致している。

(iii) 政府の予算制約がみたされている。

上の定義で $t = 0$ とすると、GP(1986)における不完備市場均衡 (GEI) に戻る。経済 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) に対する GEI 均衡 $(p, q, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ を、経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t = 0, \alpha)$ の課税均衡に対応する GEI 均衡と呼ぶことにしよう。ここで、経済 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) とは、賦存の組が \mathbf{e} になり、効用の組が \mathbf{U} となるような H 人の個人からなる経済である。つまり、本稿のモデルは、GP(1986)の自然な拡張になっている。次の結果が知られている。

⁴ベクトル $x = (x_i), y = (y_i)$ の間の不等号は、 $x \geq y$ により $x_i \geq y_i \forall i$ を表わし、 $x > y$ により $x \geq y$ かつ $x \neq y$ を表わし、 $x \gg y$ により $x_i > y_i \forall i$ を表わす。

定理 1 ⁵A1-A6 を仮定する。このとき $\bar{t} := (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_S) \gg 0$ が存在して、任意の $t \in \{t' \in \mathcal{T}' \mid t' \in \prod_{s \in S} (0, \bar{t}_s)\}$ に対して $p \gg 0$ である課税均衡が存在する。

定理 1 では、A1-A4 をみたす組 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) に対して \bar{t} が決まっている。定理 1 の証明において、 Z^h は対角要素が 1 または 0 で、他の要素は全て 0 の対角行列なので、どのように (\mathbf{U}, \mathbf{e}) を選んでも有限個の可能性しかない。よって、それぞれ最小のものを取り出して、再び $\bar{t} \gg 0$ を決めることができる。そこで $\mathcal{T} := \prod_{s \in S} (0, \bar{t}_s) \cap \mathcal{T}'$ とおくと、A1-A4 をみたす任意の組 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) に対して均衡が存在する。つまり、

系 1 A1-A6 を仮定する。A1-A4 をみたす任意の組 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) と、任意の $t \in \mathcal{T}$ に対して $p \gg 0$ である課税均衡が存在する。

3 効率性

以下では課税均衡の効率性について研究する。不完備市場においては、よく知られているように、均衡は生成的にパレート非効率である。ここでは、課税均衡も生成的にパレート非効率であることを示そう。次の仮定も必要になる。

(A7) U^h は \mathbb{R}_{++}^{SL} 上で 2 回連続微分可能、 $\nabla U^h \gg 0$ かつ $\nabla^2 U^h$ は \mathbb{R}_{++}^{SL} 上で負値定符号である。

(A8) 効用関数は状態に関して分離可能であるとする； $U^h(x^h) := \sum_{s \in S} u_s^h(x_s^h)$

A7 は、需要関数が微分可能となるための十分条件の一部である。A8 は計算を簡単にするための仮定である。

まず、需要関数は連続微分可能であることを示そう。個人の最大化問題の一階条件を全微分すると、次の係数行列が得られる。

$$\Omega := \begin{bmatrix} \nabla^2 U^h & -P & 0 & 0 \\ -P^T & 0 & R^h & 0 \\ 0 & R^{hT} & 0 & q \\ 0 & 0 & q^T & 0 \end{bmatrix}, \text{ where } P := \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_S \end{bmatrix}$$

ここで、 R^h は $\max(y^h, 0) \geq 0$ ならば第 a 列が \bar{R} の第 a 列、 $\min(y^h, 0) < 0$ ならば第 a 列が R の第 a 列である行列である。 r_s^h で R^h の第 s 行を表す。A6 より、 $\det \Omega \neq 0$ なので、陰関数定理より x^h, y^h, λ^h は p, q, T^h, t に関して連続微分可能である。ここで、 $\lambda^h := (\lambda_0^h, \lambda_1^h, \dots, \lambda_S^h)$ は予算制約のラグランジュ乗数である。以上のことから、総超過需要関数

$$f(\mathbf{e}, t, p, q, \mathbf{T}) := (x(\mathbf{e}, t, p, q, \mathbf{T}) - \Sigma_h e^h, y(\mathbf{e}, t, p, q, \mathbf{T}))$$

も p, q, \mathbf{T}, t に関して連続微分可能である。

次に、以下で用いる数学の用語と結果を準備しておく⁶。

M, N をそれぞれ m, n 次元の微分多様体とし、 $f : M \rightarrow N$ を連続微分可能な関数とする。 f が $0 \in N$ と横断的 (transversal) であるとは、 $f(x) = 0$ をみたす任意の $x \in M$ に対して $\text{rank} Df|_x = n$ が成り立つことと定義する⁷。 $m < n$ ならばつねに $\text{rank} Df|_x < n$ なので、 f が $0 \in N$ と横断的ならば $f^{-1}(0) = \emptyset$ である。

⁵証明は清水 (2002) 定理を参照

⁶微分多様体などの定義や、定理の証明は、Guillemin and Pollack(1974) を参照せよ。

⁷つまり、 $\forall x (x \in M, f(x) = 0 \Rightarrow \text{rank} Df|_x = n)$

正則値定理 (regular value theorem) f が $0 \in N$ と横断的ならば, $f^{-1}(0)$ は $m - n$ 次元微分多様体になるか, \emptyset のどちらかである。 $m = n$ のときは, ゼロ次元微分多様体 (離散集合) であり, さらに, コンパクト集合 $K \subset M$ に対して $f^{-1}(0) \cap K$ は有限集合になる。

L を l 次元微分多様体とし, $f : L \times M \rightarrow N$ を連続微分可能な関数とする。 $x \in L$ を固定し, $f_x : M \rightarrow N, f_x(y) := f(x, y) \forall y \in M$ を考える。

横断性定理 (transversality theorem) f が $0 \in N$ と横断的ならば, ほとんど全ての $x \in L$ において f_x は 0 と横断的である。 さらに, 任意のコンパクト集合 $K \subset M$ に対して, f_x を K に制限したとき, f_x が 0 と横断的であるような $x \in L$ の全体は L において開集合になる。 とくに, $f^{-1}(0) \subset L \times K$ ならば, f_x が 0 と横断的であるような $x \in L$ の全体は L において生成的である。

$E \subset \mathbb{R}_+^{SLH}$ を消費者の賦存の組からなる開集合とし, その閉包 \bar{E} が $\bar{E} \subset \mathbb{R}_+^{SLH}$ をみたし, かつ, \bar{E} はコンパクトであるとする。 \mathcal{U} で A1, A3, A4, A7, A8 をみたす効用関数全体の集合をあらわす。 また, $p \gg 0$ より, $q \gg 0$ であることに注意しておこう。 まず, 定理を証明するために補題を示しておこう。

補題 1 仮定 A1-A8 がみたされているとき, 任意の効用関数の組 $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ と税率 $t \in \mathcal{T}$ に対して E の生成的部分集合 $E_1 \subset E$ が存在して, $\mathbf{e} \in E_1$ である任意の $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)$ に対して課税均衡は局所的一意性をみたし, かつ (\mathbf{e}, t) の近傍で均衡価格 p, q と均衡における移転 \mathbf{T} は (\mathbf{e}, t) の連続微分可能な関数である。

(証明)

$p \gg 0$ より $p_{s1} = 1, \forall s \in S$ と基準化でき, $q \gg 0$ より $q_1 = 1$ と基準化できる。 ニュメレール (第 1 財と第 1 証券) 以外の価格の集合を, $M := \mathbb{R}_+^{S(L-1)} \times \mathbb{R}^{A-1}$ と定義する。 M は開集合なので $(A-1) + S(L-1)$ 次元多様体である。 ここで, 効用関数の組 \mathbf{U} と税率 t を固定しておこう。 ニュメレール以外の総超過需要関数を

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(\mathbf{U}, t)} : E \times M \times \mathbb{R}^S &\rightarrow \mathbb{R}_+^{S(L-1)} \times \mathbb{R}^{A-1} \\ \hat{f}_{(\mathbf{U}, t)}(\mathbf{e}, p, q, \mathbf{T}) &:= (\hat{x}(\mathbf{e}, p, q, \mathbf{T}) - \Sigma_h \hat{e}^h, \hat{y}(\mathbf{e}, p, q, \mathbf{T})) \end{aligned}$$

とする。 ハット ($\hat{\cdot}$) でニュメレールを除いていることを意味する。 ワルラス法則より, ニュメレール以外がクリアーすると, ニュメレールもクリアーすることに注意しよう。 $\hat{f}_{(\mathbf{U}, t)}^{-1}(0)$ は, 均衡対応のグラフである。 まず, $\hat{f}_{(\mathbf{U}, t)}$ が 0 と横断的であることを示す。 第 1 主体の賦存を摂動 (perturb) したときの超過需要の変化を考える。 各状態において, ニュメレールの賦存を p_{s1} 単位だけ減らし, 第 l 財を 1 単位増やすような摂動を行う。 このとき第 1 主体は価格が変わらなければ, $l(s)$ を 1 単位追加的に供給し, $1(s)$ を p_{s1} 単位追加的に需要する。 よってニュメレール以外の超過需要への影響は, $l(s)$ 財市場において 1 単位需要が減少することである。

証券については $a \neq 0$ として場合分けをする。 まず, 十分小さい ϵ をとっておく。 (1) $y_1^1 > 0, y_a^1 > 0$ のときは, 第 1 主体のニュメレールの賦存を $\epsilon\{r_{sa} - q_a r_{s1} + \alpha_s^1 t_s (r_{sa} - q_a r_{s1})\} \forall s$ だけ摂動し, 主体 $h \neq 1$ のニュメレールの賦存を $\epsilon\{\alpha_s^h t_s (r_{sa} - q_a r_{s1})\} \forall s$ だけ摂動すると, 価格が変わらなければ証券 a の需要が 1 だけ減少し, 証券 1 の需要が q_a だけ増加する。 (2) $y_1^1 > 0, y_a^1 \leq 0$ のときは第 1 主体のニュメレールの賦存を, $\epsilon\{r_{sa} - q_a r_{s1} + \alpha_s^1 t_s r_{s1}\} \forall s$ だけ摂動し, 主体 $h \neq 1$ のニュメレールの賦存を $-\epsilon\{\alpha_s^h t_s r_{s1}\} \forall s$ だけ摂動すると, 証券 1 の需要が q_a だけ減少し, 証券 a の需要が 1 だけ増加する。 また, (3) $y_1^1 \leq 0, y_a^1 > 0$, (4) $y_1^1 \leq 0, y_a^1 \leq 0$ の場合も同様にできる。

よって、価格が変わらなければ、ニューメーラ以外の総超過需要への影響は、証券 a の超過需要が 1 単位増加することである。以上から、 $\hat{f}_{(\mathbf{U},t)}$ が 0 と横断的であることが分かった。次に、

$$g_{(\mathbf{U},t)} : E \times M \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$$

$$g_{(\mathbf{U},t)}(\mathbf{e}, p, q, \mathbf{T}) := (T_s - t_s r_s \cdot \sum_h y_+^h)_{s \in S}$$

と定義し、 $g_{(\mathbf{U},t)}$ が 0 と横断的であることを示す。ある主体の証券 1 の需要が 1 単位増えるようにニューメーラの賦存を $(1 - t_s)r_{s1}$ だけ増やせばよい。 y_1^h である主体 h の賦存を振動すればよい。よって、 $g_{(\mathbf{U},t)}$ が 0 と横断的であることがいえた。

よって、 $F_{(\mathbf{U},t)} := (\hat{f}_{(\mathbf{U},t)}, g_{(\mathbf{U},t)})$ は 0 と横断的である。また、 E の閉包がコンパクトなので、コンパクトな集合 $K \subset E \times \mathbb{R}^S$ が存在して $F_{(\mathbf{U},t)}^{-1}(0) \subset E \times K$ とできる。よって、横断性定理より、生成的な集合 $E_1 \subset E$ が存在して、任意の $\mathbf{e} \in E_1$ に対して $F_{(\mathbf{U},\mathbf{e},t)}$ は 0 と横断的である。 $F_{(\mathbf{U},\mathbf{e},t)}$ は $(A - 1) + S(L - 1)$ 次元多様体から $(A - 1) + S(L - 1)$ 次元多様体への写像なので、正則値定理より $F_{(\mathbf{U},\mathbf{e},t)}^{-1}$ は 0 次元多様体である。よって、均衡集合は離散集合である。陰関数定理を用いると、均衡価格 p, q と均衡における移転 T^h は、賦存 \mathbf{e} と税率 t の連続微分可能な関数となる。(証明終り)

補題 2 A1-A7 がみたされているとき、任意の効用関数の組 $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ と税率 $t \in \mathcal{T}$ に対して E の生成的な部分集合 E_2 が存在して、 $\mathbf{e} \in E_2$ である任意の $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)$ に関する課税均衡で、各個人は第 1 証券以外の全ての証券を取引する。

(証明)

$h, a \neq 1$ を固定する。 $y_a^h(e^h, p, q, T^h)$ は、補題 3 と同様にすると、0 と横断的であることが分かる。よって

$$Y_{h,a}(\mathbf{U}, t) : E \times M \times \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^{S(L-1)} \times \mathbb{R}^{A-1} \times \mathbb{R}$$

$$Y_{h,a}(\mathbf{U}, t) := (F_{(\mathbf{U},t)}, y_a^h)$$

と定義する。補題 4 と同様に横断性定理より生成的な集合 $E_{h,a}$ が存在して $Y_{h,a}(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)$ は 0 と横断的である。正則値定理より $Y_{h,a}^{-1}(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)(0) = \emptyset$ である。よって、 $\mathbf{e} \in E_{h,a}$ をみたす任意の $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)$ に対して $y_a^h \neq 0$ である。これを全ての $h, a \neq 1$ について繰り返すと

$$E_2 := \{\cap_{h \in H \setminus \{1\}, a \in A \setminus \{1\}} E_{h,a}\} \cap E_1$$

が得られる。 E_2 が求める集合である。(証明終り)

定理 2 $H \leq S$ とし、A1-A8 がみたされているとする。このとき、任意の税率 $t \in \mathcal{T}$ に対して $\mathcal{U} \times E$ の生成的な集合 $\mathcal{U}_1 \times E_3$ が存在して、任意の $(\mathbf{U}, \mathbf{e}) \in \mathcal{U}_1 \times E_3$ である経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t, \alpha)$ の均衡はパレート非効率である。とくに、税率を変更するだけで、均衡をパレート改善できる。

(証明)

E を E_2 に制限しておく。定理を示すためには、次の行列

$$\mathbb{A} := \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_H^1 & a_{H+1}^1 & \cdots & a_S^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^H & \cdots & a_H^H & a_{H+1}^H & \cdots & a_S^H \end{bmatrix}$$

が均衡において生成的にフルランクであることを示せばよい。ここで、⁸

$$\begin{aligned}
a_s^h &:= \frac{\partial u_s^h(x_s^h(t, p(t), q(t), T^h(t)))}{\partial t_s} \\
&:= \frac{\partial u_s^h}{\partial x_s^h} \frac{\partial x_s^h}{\partial t_s} + \frac{\partial u_s^h}{\partial x_s^h} \frac{\partial x_s^h}{\partial T_s^h} \frac{\partial T_s^h}{\partial t_s} + \frac{\partial u_s^h}{\partial x_s^h} \frac{\partial x_s^h}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t_s} + \frac{\partial u_s^h}{\partial x_s^h} \frac{\partial x_s^h}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t_s} \\
&:= \lambda_s^h \cdot \frac{\partial x_s^h}{\partial t_s} + \lambda_s^h \alpha_s^h (p_s \cdot v_s^h) (r_s \cdot \Sigma_h y_+^h) \\
&\quad + \lambda_s^h p_s^T (K_{s1}^h \frac{\partial p_s}{\partial t_s} + \dots + (K_{ss}^h - v_s^h x_s^T) \frac{\partial p_s}{\partial t_s} + K_{sS}^h \frac{\partial p_S}{\partial t_s}) + \lambda_s^h r_s^h \frac{\partial y^h}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t_s}
\end{aligned} \tag{3}$$

$v_s^h := \frac{\partial x_s^h}{\partial T_s^h}$ は状態 s の所得効果、 K_{sj}^h は状態 j の価格 p_j に関する状態 s の代替行列である。また、各状態の予算制約を q で微分すると、 $p_s \cdot \frac{\partial x_s^h}{\partial q} = r_s^h \cdot \frac{\partial y^h}{\partial q}$ であることに注意⁹。効用関数を2次摂動 (quadratic perturb) することで、 K_{ss}^h と v_s^h を自由に変化させることができるので、 a_s^h を1単位増やし、 $a_{s'}^{h'}, h \neq h', s \neq s'$ と F を変化させないようにすることができる (Geanakoplos and Polemarchakis(1980) を参照)。とくに、(3) の最右辺の第2項は、 $\lambda_s^h > 0, a_s^h > 0, p_s \gg 0, r_s \geq 0, \Sigma_h y_+^h \gg 0$ より、 v_s^h を変化させることで、 a_s^h を変化させることに注意しよう。

$$h : \mathcal{U} \times E \times \mathcal{T} \times M \times \mathbb{R}^S \times S^{H-1} \rightarrow \mathbb{R}^H$$

$$h(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t, p, q, \mathbf{T}, b) := A_1 b$$

と定義すると、 h は0と横断的であることが分かった。ここで、 S^{H-1} は H 次元単位球面である。さらに、

$$G := (F, h) : \mathcal{U} \times E \times \mathcal{T} \times M \times \mathbb{R}^S \times S^{H-1} \rightarrow \mathbb{R}^{A-1} \times \mathbb{R}^{(L-1)S} \times \mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^H$$

と定義すると、補題3の証明から F が0と横断的であることが分かっているから、 G が0と横断的であることが分かり、横断性定理より、 $G_{(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)}$ は、ほとんどすべての $(\mathbf{U}, \mathbf{e}) \in \mathcal{U} \times E$ に対して0と横断的であることが分かる。さらに、正則値定理より、 $G_{(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t)}^{-1}$ である。よって、 $F(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t, p, q, \mathbf{T}) = 0$ ならば、 $A_1 b = 0$ となる $b \in S^{H-1}$ は存在しない。よって A_1 はフルランクである。よって \mathbb{A} はフルランクである。(証明終り)

この定理から分かることは、課税均衡は生成的にパレート非効率なこと、さらに、課税均衡は税率を変化させることだけでパレート改善できることである。つぎに、この結果を用いて、資本所得税を導入することによって、経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t = 0, \alpha)$ の課税均衡に対応する GEI 均衡をパレート改善できることを示す。

4 Arrow-Debreu 均衡の達成不可能性

前節では、定理2より、課税均衡は生成的にパレート非効率であることが示され、しかも、税率のみをコントロールすることで、課税均衡をパレート改善できることが分かった。しかし、本稿で考えているような税制では、課税均衡は、全ての先物市場を持つ Arrow-Debreu 均衡 (AD 均衡と略す) で実現する消費配分を達成することができない、つまり、課税均衡は生成的にパレート効率を達成することはできない。まず、AD 均衡を定義しておこう。

⁸以下では、第1財・第1証券を除いたものを用いているので、 $\hat{p}, \hat{q}, \hat{x}, \hat{y}$ などと表記すべきだが、簡単のため $\hat{\cdot}$ を除いて p, q, x, y などと表わす。

⁹証券に関する部分のスルツキー分解は、Elul(1995) を参考にしている。

定義 3 経済 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) の AD 均衡とは組 $(\mathbf{x}, \phi), \phi \in \mathbb{R}_{++}^{SL}$ で

(i) $\max U^h(x^h)$ s.t. $\phi \cdot (x^h - e^h) = 0$

(ii) $\sum_h (x^h - e^h) = 0$

をみたすものとする。

いま, $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\phi})$ が AD 均衡であるとする。個人の最適化問題の一階条件は

$$\frac{\partial U^h}{\partial x_{sl}}(\bar{x}^h) = \psi \bar{\phi}_{sl}$$

である。ここで, ψ はラグランジュ乗数である。いま, $\phi_{11} = 1$ と基準化すると

$$\frac{\partial U^h}{\partial x_{11}} = \psi$$

となる。よって

$$\bar{\phi}_{sl} = \frac{\partial U^h(\bar{x}^h)/\partial x_{sl}}{\partial U^h(\bar{x}^h)/\partial x_{11}} = \frac{\lambda_s^h p_{sl}}{\lambda_1^h p_{11}} = \frac{\lambda_s^h p_{sl}}{\lambda_1^h} = \lambda_s^h p_{sl}$$

である。ここで, $\lambda_1^h = 1 \forall h$ となるよう基準化しておく。AD 均衡はパレート最適なので限界代替率は全ての個人の間で一致し, $\bar{\phi}$ である。以上の準備のもとで課税均衡が AD 均衡消費配分を実現できないことを示そう。

定理 3 経済 (\mathbf{U}, \mathbf{e}) の AD 均衡 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\phi})$ が与えられたとき, $\mathbf{e} \in E_2$ をみたす経済 $(\mathbf{U}, \mathbf{e}, t, \alpha)$ の課税均衡が AD 均衡消費配分を実現するように, つまり $(p, q, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{T})$ となるように税制 t, α を与えることはできない。

(証明)

いま, 各個人の消費が AD 均衡消費配分 $\bar{\mathbf{x}}$ と一致し, 基準化された限界代替率が $\lambda^1 = \dots = \lambda^H = (\bar{\phi}_{11}, \bar{\phi}_{21}, \dots, \bar{\phi}_{H1}) = \bar{\lambda}$ となる課税均衡が存在したとする。課税均衡における個人の予算制約より

$$\begin{aligned} p \square (\bar{x}^h - e^h) - T^h &= R^h y^h \\ 0 &= q \cdot y^h = \bar{\lambda}^T R^h y^h = \bar{\lambda}^T (p \square (\bar{x}^h - e^h) - T^h) \end{aligned}$$

よって

$$(\lambda \square p) \cdot (\bar{x}^h - e^h) - \bar{\lambda} T^h = \bar{\phi}(\bar{x}^h - e^h) = 0$$

ここで,

$$\begin{aligned} p \square (\bar{x}^h - e^h) &:= (p_s \cdot (\bar{x}_s^h - e_s^h))_{s \in S} \\ (\lambda \square p) &:= (\lambda_s p_s)_{s \in S} \end{aligned}$$

とする。よって, 上式は

$$(\bar{\lambda}_1 \bar{T}_1, \dots, \bar{\lambda}_S \bar{T}_S) \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_S^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^H & \dots & \alpha_S^H \end{bmatrix} = 0$$

を意味する。一方 $(\bar{\lambda}_1 \bar{T}_1, \dots, \bar{\lambda}_S \bar{T}_S) \gg 0$ かつ $\alpha_s^h > 0 \forall s \forall h$ なので

$$(\bar{\lambda}_1 \bar{T}_1, \dots, \bar{\lambda}_S \bar{T}_S) \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_S^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^H & \cdots & \alpha_S^H \end{bmatrix} > 0$$

である。これは矛盾。よって $(p, q, \bar{x}, \mathbf{y}, \mathbf{T})$ かつ $\lambda^1 = \dots = \lambda^H = \bar{\lambda}$ となる課税均衡は存在しない。(証明終り)

5 まとめ

本稿では、課税均衡のパレート効率性を中心に議論してきた。ここでは、以上の分析を要約し、その経済学的含意を述べよう。本稿のモデルでは、政府がパレート改善を実行するために利用できるパラメータ（政策変数）の数は、税率 t の S 個と、配当率 α の $H(S-1)$ 個である。ところで、定理1から分かった事は、課税均衡は一般的にパレート非効率であり、しかも、税率のみをコントロールすることでパレート改善できることであった。これは、政府が利用できる政策変数のうちの一部でパレート改善可能な政策を実行できることを示しており、政策の実行が、全ての政策変数を操作しなければならないときに比べ容易であると解釈できる。

また、上で述べたように、政府は操作できる変数の一部のみでパレート改善が実行できるので、全ての変数をうまく用いれば、パレート効率が達成できるのではないかという予想を持つかもしれない。定理2よりわかったことは、一般的にパレート効率を達成できないことであった。つまり、そのような予想は正しくないことを示している。 [2002.6.27 619]

参考文献

- [1] Arrow, (1964) The role of securities in the optimal allocation of risk bearing. R.E.S.31. 91-96.
- [2] Diamond and Mirrlees,(1992) Optimal taxation of identical consumers when markets are incomplete. Desgupta.et.al (eds.) Economics analysis of markets and games: Essay in Honor of Frank Hahn. MIT Press.
- [3] Debreu, (1959) Theory of Value. Yale U.P.
- [4] Elul, (1999) Welfare improving financial innovation with a single good. Economic Theory13. 25-40
- [5] Geanakoplos and Polemarchakis, (1980) On the disaggregation of excess demand functions. Econometrica 48. 315-331.
- [6] Geanakoplos and Polemarchakis, (1986) Existence,regularity,and constrained suboptimality of competitive allocation when asset structure is incomplete. IN: Heller, Starr, Starrett (eds.) Uncertainty, information and communication: Essay in honor of K.Arrow, Vol.3. Cambridge U.P.
- [7] Magill and Quinzii, (1996) Theory of Incomplete Market. Vol.1. MIT.U.P.

- [8] Magill and Shafer, (1991) Incomplete market. IN: Hildenbrand and Sonnenschein(eds.) Handbook of mathematical economics, Vol.4. North- Holland.
- [9] Guillemin and Pollack, (1974) Differential topology. Prentice-Hall.
- [10] Radner, (1972) Existence of equilibrium of plan, prices and price expectations. Econometrica 40. 289-303.
- [11] Tirelli, (2000) Capital income taxation when markets are incomplete. CORE Discussion paper 2000/11 February 2000
- [12] Werner, (1985) Equilibrium in economies with incomplete markets. J.E.T.36.110-119.
- [13] 清水, (2002) 「課税均衡の存在 : 不完備市場モデルへの資本所得税の導入」, Discussion Paper Series 2002/9 神戸大学大学院経営学研究科

ディスカッション・ペーパー出版目録

番号	著者	論文名	出版年月
2001・1	畠田 敬 砂川 伸幸	Stock Price Behavior Surrounding Repurchase Announcements: Evidence from Japan	1 / 2001
2001・2	中嶋 道靖 水口 剛 國部 克彦 大西 靖	IMUのマテリアル・フロー・コスト会計(2000年10月版)	1 / 2001
2001・3	奥林 康司	Japanese Manufacturers Without Factories: Cases of Sony, Matsushita, Misumi, People	1 / 2001
2001・4	國部 克彦 野田 昭宏 大西 靖 品部 友美	Determinants of Environmental Report Publication in Japanese Companies	2 / 2001
2001・5	宮下 國生	Logistics Strategy of Japanese Port Management	2 / 2001
2001・6	坂下 昭宣	機能主義的組織文化論の課題と方法	3 / 2001
2001・7	國部 克彦 梨岡英理子 大工原梨恵	日本企業の環境会計:東証一部上場企業 2000年11月現在の実態調査	3 / 2001
2001・8	國部 克彦 倉阪 智子	Corporate Environmental Accounting: A Japanese Perspective	3 / 2001
2001・9	村田 修造	日米経営比較(6) 医療・介護と経営学	4 / 2001
2001・10	矢野 誠 出井 文男	A Trade Model with Vertical Production Chain and Competition Policy in the Downstream Sector	12 / 2000
2001・11	大倉 真人	生命保険における危険分類について 大量性要件と同質性要件とのトレードオフ問題を中心として	5 / 2001
2001・12	大倉 真人	リスク細分型保険は本当に望ましいか?	5 / 2001
2001・13	村田 修造	日米経営比較(5) 日米企業間摩擦	6 / 2001
2001・14	奥林 康司 高階 利徳	大企業OB会会員の職務経歴と再就業に関する実態調査報告書	7 / 2001
2001・15	原 拓志	医薬品の社会的形成	7 / 2001
2001・16	村田 修造	日米経営比較(7) 日本経営の再生に向けて	7 / 2001
2001・17	上林 憲雄	Cultural influences on IT usage among workers: a UK-Japanese comparison	7 / 2001
2001・18	福田 祐一	A Test for Rational Bubbles in Stock Prices	7 / 2001
2001・19	田中 一弘 延岡 健太郎	有効な企業統治改革に向けて:執行役員制と企業の意思決定能力	7 / 2001

ディスカッション・ペーパー出版目録

番号	著者	論文名	出版年月
2001・20	田中 一弘	執行役員制導入によるトップ・マネジメントの変容	7 / 2001
2001・21	大倉 真人	リスク細分型保険は本当に望ましいか？ <改訂版>	8 / 2001
2001・22	田中 一弘	企業統治論序説	8 / 2001
2001・23	大倉 真人	損害防止努力インセンティブに関する一考察 主体均衡分析による検討	8 / 2001
2001・24	國部 克彦 野田 昭宏 大西 靖 品部 友美 東田 明	日本企業による環境情報開示の規定要因 環境報告書の発行と質の分析	8 / 2001
2001・25	國部 克彦 品部 友美 東田 明 大西 靖 野田 昭宏	日本企業の環境報告書分析 内容分析と規定要因	8 / 2001
2001・26	國部 克彦 梨岡 英理子	日本企業の環境会計：東証一部上場企業の実態調査	8 / 2001
2001・27	高木 雅一	Elementary Study of East Asian Corporate and Management System	9 / 2001
2001・28	大倉 真人	保険市場における価格・非価格競争	9 / 2001
2001・29	高尾 厚	なぜ近代保険と原始的共済とが併存するのか？ 近代保険普及に関する進化経済学的研究	9 / 2001
2001・30	大倉 真人	An Essay in the Economics of Post-loss Minimisation: An Analysis of the Effectiveness of the Insurance Law and Clauses	9 / 2001
2001・31	高木 雅一	阪神地域と東南アジアとの連携 相互利益のビジネス機会を探る	9 / 2001
2001・32	上林 憲雄 Harry Scarborough	Cultural influences on IT use amongst factory managers: A UK-Japanese comparison	10 / 2001
2001・33	水谷 文俊 浦西 秀司	The Post Office vs. Parcel Delivery Companies: Competition Effects on Costs and Productivity	10 / 2001
2001・34	大倉 真人	An Essay in the Economics of Post-loss Minimisation: An Analysis of the Effectiveness of the Insurance Law and Clauses <revised version of No.2001・30>	11 / 2001
2001・35	原田 勉	日本における IT パラドクスの再検討 ～ IT 革命の終焉とはじまり～	11 / 2001

ディスカッション・ペーパー出版目録

番号	著者	論文名	出版年月
2001・36	砂川 伸幸	Open-Market Repurchase Announcements, Actual Repurchases, and Stock Price Behavior in Inefficient markets	12 / 2001
2001・37	砂川 伸幸	Corporate Financial Strategy and Stock Price Behavior in a Noise Trader Model with Limited Arbitrage	12 / 2001
2002・1	砂川 伸幸	株式持合いと持合い解消：エントレンチメント・アプローチ	1 / 2002
2002・2	砂川 伸幸	自社株買入れ消却と株価動向の理論	1 / 2002
2002・3	大倉 真人	An Equilibrium Analysis of the Insurance Market with Vertical Differentiation	2 / 2002
2002・4	Elmer Sterken 得津 一郎	What are the determinants of the number of bank relations of Japanese firms?	3 / 2002
2002・5	大倉 真人	レビュー・アーティクル 保険市場における逆選択研究の展開	3 / 2002
2002・6	大倉 真人	Welfare Effect of Firm Size in Insurance Market	3 / 2002
2002・7	砂川 伸幸	投資期間と投資行動 短期トレーダーと長期トレーダーの投資戦略	3 / 2002
2002・8	奥林 康司 高階 利徳	大企業 OB 会会員の職務経歴と再就業に関する 実態調査報告書(2) - Y 社 OB 会の実態調査 -	4 / 2002
2002・9	清水 一	課税均衡の存在 不完備市場モデルへの資本所得税の導入	4 / 2002
2002・10	砂川 伸幸	ファイナンシャル・ディストレス・コストと負債の リストラクチャリング 債務免除と債務の株式化	4 / 2002
2002・11	砂川 伸幸	Open-Market Repurchase Announcements, Actual Repurchases, and Stock Price Behavior in Inefficient Markets <revised version of No.2001・36>	5 / 2002
2002・12	忽那 憲治 Richard Smith	Why Does Book Building Drive Out Auction Methods of IPO Issuance? Evidence and Implications from Japan	5 / 2002
2002・13	宮下 國生	International Logistics and Modal Choice	6 / 2002
2002・14	清水 一	不完備市場における課税均衡の存在：公共財供給のケース	6 / 2002
2002・15	清水 一	資本所得税による課税均衡のパレート改善可能性について	6 / 2002